*Prof. dr hab. Władysław Adam Majewski*
**Instytut Fizyki Teoretycznej i Astrofizyki, UG.**
88-952 Gdańsk, ul. Wita Stwosza 57,
tel.(+48-58) 523-22-33, E-mail: fizwam@univ.gda.pl

Gdańsk, 1.06.2016

Prof. dr hab. Antoni Ciszewski,
Dziekan
Wydziału Fizyki i Astronomii,
Uniwersytet Wrocławski,
pl. Maxa Borna 9,
50-204 Wrocław.

**Recenzja:**
*Rozprawy doktorskiej mgr Marka Millera.*

Przedstawiona mi do recenzji rozprawa *"Matematyczne metody algebr operatorów w analizie kryterium splątania złożonych układów kwantowych"* Pana mgr. Marka Millera dotyczy charakteryzacji pewnej rodziny stanów kwantowych, zwanych stanami splątanymi oraz dodatkowo analizy odwzorowań dodatnich określonych na niskowymiarowych algebrach macierzowych. Innymi słowy, część pierwsza dotyczy pięknej charakteryzacji wybranej rodziny stanów kwantowych, podczas gdy część druga, nawiasem mówiąc dobrze umotywowana wynikami części pierwszej, dotyczy pewnych "toy" modeli intensywnie używanych w informatyce kwantowej.

Rozprawa składa się z wstępu, trzech rozdziałów, krótkiego podsumowania oraz bibliografii liczącej 61 pozycji. Całość liczy 69 stron.

Wstęp, 5-cio stronicowy wprowadza w problematykę rozprawy. Jest napisany dobrze w wyjatkiem:
1. Skoro autor ma ambicje zaczynać od algebr operatorowych to opisując tzw kryterium Peresa-Horodeckich nie wiadomo dlaczego pominął wykład Choi z AMS Summer Institute 1980, Kingston; opublikowany w Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 38 (1982) Part 2; M-D. Choi, *Positive linear maps*, strony 583-590; w szczególności na stronach 584-585 jest naszkicowany problem będący tematem rozprawy.

2. Myślę, że lepszą referencją do lokalnych algebr obserwabli w kwantowej teorii pola, niż podana w rozprawie, jest książka R. Haaga *"Local Quantum Physics; Fields, Particles, Algebras"*, Springer, drugie wydanie 1996.

3. Na str. 8; brak precyzyjnego rozgraniczenia pomiędzy pojęciem stopni swobody układu a wymiarem przestrzeni Hilberta opisującej rozważany układ.

4. Str 9; ad. "jedynym znanym warunkiem separowalności"; są inne tego typu warunki, patrz W.A.M.: Lett. Math. Phys. vol 67, 125-132 (2004); J. Phys. A Math. Gen vol. 35, 123-134 (2002); *Quantum correlations; quantum probability approach*, arXiv: 1407.4754 , patrz Twierdzenie 8.5 oraz Twierdzenie 9.7.

Rozdział pierwszy. Jest to dobrze napisane wprowadzenie do używanego aparatu matematycznego. Moje główne uwagi to :

1. str 14. ad. "egzotycznych faktorów typu III"; Myślę, że od lat 70-tych, fizyk tak nie może pisać. Wspomniana książka Haaga pokazuje, między innymi, że te faktory to główna struktura do opisu dużych (o nieskończonej ilości stopni swobody) układów kwantowych. A więc faktory typu III nie mogą być "egzotyczne" dla fizyka.

2. Opis iloczynu tensorowego dla algebr von Neumanna jest nieścisły. Tu też nie ma jedynej normy. Wystarczy porównać uważnie paragrafy 4.1 i 4.5 z używanej książki Takesakiego a następnie uważnie popatrzć na normę wprowadzoną przez Effros-Ruana. Pięknym przykładem ilustrującym ten problem jest praca G. Pisier, Remarks on B(H)⊗B(H), Proc.Indian. Acad. Sci. (Math. Sci.) vol. 116 (2006) str 423-428; Algebra B(H), gdy dimH jest nieskończony nie jest algebra nuklearną! Na szczeście, wyniki bazują na rezultatach i opisie podanym przez Effros-Ruan.

3. ad formuła 1.6. Dobrze by było wspomnieć, że jest to wniosek z twierdzenia Stinespringa.

4. str 17. ad Twierdzenie Kreina-Milmana. Raczej powinno być Twierdzenie Caratheodory'iego, patrz G. Choquet, *Lectures on Analysis*, vol. 2; str 106. Twierdzenie Kreina-Milmana jest silnym uogólonieniem tego ostatniego i w szczególności nie ma mowy w nim o ilości punktów ekstremalnych.

5. str 17. Moim zdaniem "wystający" to niezręczne spolszczenie terminu "exposed" - polecam książkę J.P Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, *Fundamentals of convex analysis* opisującą intuicje do tych pojęć; w szczególności "exposed" punkt to 0 wymiarowa eksponowana ściana. Przy czym po co spolszczać punkt eksponowany, gdy w następnym rozdziale na różne sposoby używa się "net"! A tu polska matematyka ma jakże piękne tradycje i ustaloną terminologię.

Rozdział drugi: Zawiera on główny wynik rozprawy - Twierdzenie 2.3 i jego $C^*$-algebraiczną wersję Twierdzenie 2.14. Są to piękne twierdzenia i dotyczą one układów, które zawierają w swym opisie kwantyzację! Jest to cecha niestety dość rzadko spotykana w współczesnej literaturze dotyczącej analizy stanów kwantowych. Dlatego omawiając tę cześć rozprawy, nie można nie podkreślić piękna użytego formalizmu.

Dowód Twierdzenia 2.3, dość długi i podzielony jest na sześć części. Opiera się on na analizie struktury stożka $C_1^*$ i jego "duali". Dowód Twierdzenia 2.14 wykorzystuje relacje pomiędzy $C^*$-algebrą a algebrą von Neumanna związaną z drugą dualą do $C^*$-algebry. Moje główne uwagi to:

1. Ad. pierwsze zdanie po dowodzie lematu 2.4. Jak autor rozróżnia dodatnie CB

odwzorowanie od CP?

2. Krok 4-ty. Dowód ma być dla skończonych a opiera się na własnościach $\sigma$-skończonych (skończona jest sumą prostą $\sigma$-skończonych). Przeto dowód jest niejasny. Takesaki na stronie 178 rozważa semidyskretne algebry i produkuje je przy pomocy $\sigma$-skończonych rzutów. W szczególności, jest tam użyty trick bazujący na teorii Tomita-Takesaki do czego potrzebny jest wierny stan. $\sigma$-skończoność to gwarantuje. Inaczej trzeba by było używać wag i bardziej subtelnych argumentów. Oczywiście, jak już powiedziano, algebra skończona jest sumą algebr $\sigma$-skończonych.

Dodajmy na koniec tej uwagi, że nazywanie rzutu odwzorowaniem projektywnym po prostu razi.

3. W wprowadzeniu do Twierdzenia 2.14 są bardzo nieprecyzyjne rozważania dotyczące iloczynu projektywnego w sensie przestrzeni operatorowych dla duali $C^*$-algebr. Mianowicie, choć $C^*$-algebra jest oczywiście przestrzenią operatorową to celu zdefiniowania "dual operator space" (w sensie Effros-Ruan) wymaga się aby wyjściowa "operator space" była słabo domknięta (a to by wracało do $W^*$-algebr; patrz Proposition 3.2.4 i dyskusję poprzedzającą twierdzenie 7.2.3 w cytowanej książce Effros-Ruan). A więc ten problem nie został opisany.

Rozdział trzeci składa się z trzech części. Jest on jak już powiedziano umotywowany wynikami poprzedniego rozdziału. Ograniczenie do niskowymiarowych algebr macierzowych ma sens ponieważ od czasu wsponianego na początku artykułu Choi, problem efektywnej charakteryzacji odwzorowań dodatnich nie został w pełni rozwiązany. Pierwsza część to bardzo zgrabny opis odwzorowań dodatnich na algebrze macierzy 2 na 2. Części druga i trzecia dotyczą odwzorowań bistochastycznych na algebrze macierzy 3 na 3. Można na to patrzeć jako na rozwinięcie i odpowiedź na pytania z artykułu S.L. Tregub, "Bistochastic operators on finite-dimensional von Neumann algebras", Izv. Vyssh. Uchebn. Zavied. Mat. 3 (1986), 75-77 (szkoda, ze nie jest on cytowany). Podana analiza jest bardzo ładna - piszącego tą recenzje miło ujęło położenie nacisku na pojawiające sie struktury algebr Jordana. Można podejrzewać, pamiętając dlaczego w latach 70-tych uważano, że odwzorowania rozkładalne powinny wyczerpywać zbiór odwzorowań dodatnich, że właśnie te struktury muszą odgrywać kluczową rolę w ogólnej charakteryzacji.

Ponieważ recenzja nie jest erratą to drobne uwagi pomijałem. Ale jednej pominąć nie mogę: pomieszanie imienia z nazwiskiem dla Masamichi Takesakiego jest okropne (patrz pozycje [55], [56], [57]).

Podsumowując, na podstawie przedstawionej mi do oceny rozprawy doktorskiej Pana mgr Marka Millera stwierdzam, że warunki stawiane rozprawom doktorskim zostały spełnione z nadwyżką. Usterki zauważone przy czytaniu rozprawy (szczególnie w rozdziale 3-cim), nie zmieniają mojej pozytywnej opinii.

W konkluzji stawiam wniosek o dopuszczenie Pana mgr Marka Millera do dalszych etapów przewodu doktorskiego; a w przypadku gdy obrona będzie przebiegała wzorowo będę wnioskował o jej wyróżnienie.